4. tétel

Elméleti javítás, dijsktra algoritmus

**Def. Gráfút hossza:** adott G irányított gráf és l hosszfüggvény esetén egy P út hossza a P éleinek összhossza: l(P)= ∑ e∈E(P) l(e).

**Def. Csúcsok távolsága:** az u és v csúcsok távolsága a legrövidebb uv út hossza. Distl (u,v):=min{l(P): P uv-út}

**Def. konzervatív hosszfv:** egy adott hosszfüggvény konzervatív ha C bármely irányított körének hossza nem negatív.

Elméleti javítás:

**Def. rl felsőbecslés:** adott G irányított gráf, és E(G) re egy hosszfüggvény. Az rl felsőbecslés olyan függvény, ami felülről becsli minden csúcs r-től mért távolságát: distl(r,v)<=f(v) minden v re ami eleme V(G)-nek. (a gráf csúcsaira magyarul)

**Triviális rl felsőbecslés:** ha v==r akkor 0, ha v!=r akkor végtelen.

**Pontos rl felsőbecslés:** f(v)=distl(r,v) a gráf minden csúcsára.

**Def. elméleti javítás:** tfh f egy r,l fb és uv az élhalmaz eleme. Az f uv-elméleti javítása az az f’, amire f’(z)={ha z!=v akkor f(z), ha z==v akkor min{f(v), f(u)+l(uv)}}

(a dijsktra algoritmusnak a működése…)(élmenti javítás helyességének bizonyítása)

1,

Tfh a hosszfv nem negatív, és f(r)=0.

Ilyenkor a az (r,l)-felső becslés élmenti javítása mindig (r,l)-felső becslést ad.

BIZ:

Meg kell mutatni, hogy van olyan rv út melynek hossza legfeljebb f(u)+ l(uv).

Egészítsünk ki egy legrövidebb ru-utat az uv éllel, így megkapunk egy rv élsorozatot, aminek a hossza legfeljebb distl(r,u)+l(u,v) ≤f(u)+l(uv). A hosszfv konzervativitása miatt belátható, hogy ha van x összhosszú rv élsorozat akkor van maximum x összhosszú rv út is. Tehát létezik lefgeljebb f(u)+l(uv) hosszú uv-út, tehát az élmenti-javítással valóban egy (r,l)-felső becslést kaptunk.

2,

F (r,l)-felsőbecslés pontos <==>f-en nincs érdemi élmenti javítás

BIZ:

=>ha f pontos akkor biztosan nincs rajta érdemi javítás, ha lenne, akkor az fb a pontos érték alá esne így az elméleti javítás eredménye nem lenne (r,l)-fb.

<=Legyen v ∈ V(G) tetsz, és legyen P egy másik legrövidebb rv-út. P egyik éle mentén sincs érdemi javítás, tehát P összes csúcsára pontos az (r,l)-fb, ebbe beletartozik az utolsó csúcsa is P-nek.

**Dijkstra algoritmus:**

**Inputja:** G=(V,E), l hosszfüggvény az élekre.

**Output:** distl(r,v) ∀v ∈ V (legrövidebb utak fája)

Működés: U0: nincs semmi, triv. (r,l)-felsőbecslés

i-edik fázis:

1 eset, legyen Ui: Ui−1 ∪ {ui} ahol ui olyan csúcs a V \ Ui-1 halmazból, amelyre fi-1(v) minimális

2 eset, fi:fi-1 élmenti javítása minden Ui-ből kivezető élen.

**Output:** f|v|. Megjelöljük a végső f|v|(v) értékeket beállító éleket

**Dijsktra algoritmus helyességének bizonyítása**

Tfh van egy u1, u2, u3….un a G csúcsainak a sorrendje a Dijkstra algoritmus végrehajtása után.

1, minden 1≤i≤n esetén f|V|(ui)≤f|V|(ui+1)

BIZ: az i edik fázisban fi(ui)≤fi(ui+1) teljesült az ui választása miatt.

Ezek után az fi(ui) nem változott.

Az fi(ui+1) még csökkenhet, de az az is csak az uiui+1 él mentén történt javítás miatt, hiszen az (i+1)-edik fázisban bekerül a készhalmazba , és a hozzátartozó (r,l)-felsőbecslés nem tud csökkenni.

Mivel l(uiui+1 ) >0 ezért valóban, fi(ui)≤fi+1(ui+1)

2, nagyobb ”befejezési számú” csúcsba vezető út nem lehet rövidebb a kisebb ”befejezési számú” csúcsba vezető útnál .

3, Dijkstra algoritmus outputjaként kapott élhalmazon nem lehet élmenti javítással változtatni.

BIZ:

Az algoritmus alatt minden lehetséges élmenti javítást elvégeztünk, tehát nem lehetséges érdemi javítás.

**Tétel:**

A dijkstra algoritmus helyesen működik, tehát g minden csúcsára igaz, hogy distl(r,v)=f|v|(v).

**Lépésszám analízis:**

Ha G nek n csúcsa van, és m éle, akkor az algoritmus n-szer keresi meg egy legfeljebb n elemől álló halmazból a min. értéket. Ez maximum konst\*n^(2) lépést igényel. Ezen kívül m elméleti javítst végez, ami konst’\*m, így tehát legfeljebb konst’’\*(n^(2)+m) lépésre van szükség, tehát az algoritmus hatékony.